Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT®
Journal of Algebra 283 (2005) 431–446
JOURNAL OF Algebra
www.elsevier.com/locate/jalgebra

Groupes satisfaisant une condition d'Engel

Groups satisfying an Engel condition

Alireza Abdollahi

Département de Mathématiques, Université d'Ispahan, Ispahan 81746-73441, Iran

Reçu le 15 novembre 2000

Disponible sur Internet le 10 décembre 2004

Communiqué par J. Tits

Résumé

Soit n un entier positif. Nous disons qu'un groupe G satisfait la condition $\mathcal{E}(n)$, si chaque ensemble de $n+1$ éléments de G contient une paire $\{x, y\}$ telle que $[x,_k y] = 1$, pour un entier positif $k = k(x, y)$. Dans cet article, nous étudions les groupes G satisfaisant cette condition. En particulier, si G est un groupe résoluble de type fini, alors $|\frac{G}{Z^*(G)}| \leqslant n^{113\sqrt{n}+2}$, où $Z^*(G)$ est l'hypercentre de G.

Abstract

Let n be a positive integer. We say that a group G satisfies the condition $\mathcal{E}(n)$, if every set of $n+1$ elements of G contains a pair $\{x, y\}$ such that $[x,_k y] = 1$, for some positive integer k. In this paper, we study finite groups G satisfying this condition. In particular, if G is a finitely generated soluble group, then $|\frac{G}{Z^*(G)}| \leqslant n^{113\sqrt{n}+2}$, where $Z^*(G)$ is the hypercentre of G.

Adresse e-mail : a.abdollahi@math.ui.ac.ir.

0021-8693/$ – see front matter
doi:10.1016/j.jalgebra.2004.08.034

1. Introduction et résultats

Les notations rappelées ici sont classiques : si x et y sont deux éléments d'un groupe, on pose $[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy = x^{-1}x^{y}$. Plus généralement, k étant un entier non négatif, on définit $[x,_k y]$ par $[x,_0 y] = x$ et $[x,_{(k+1)} y] = [[x,_k y], y]$. Si G est un groupe, on note $Z^*(G)$ l'hypercentre de G. Soit n un entier positif. Nous disons qu'un groupe G satisfait la condition $\mathcal{E}(n)$ si chaque ensemble de $n+1$ éléments de G contient une paire $\{x, y\}$ telle que $[x,_k y] = 1$, pour un certain $k = k(x, y) \in \mathbb{N}$. Ici, nous étudions les groupes satisfaisant cette condition. Nous disons qu'un groupe G satisfait la condition $(\mathcal{N}, n)$ si chaque ensemble de $n+1$ éléments de G contient une paire $\{x, y\}$ telle que le sous-groupe $\langle x, y\rangle$ soit nilpotent. Dans [13], Tomkinson a prouvé que si G est un groupe résoluble de type fini satisfaisant la condition $(\mathcal{N}, n)$, alors $|\frac{G}{Z^*(G)}| \leqslant n^{n^4}$. Dans [11], Longobardi et Maj ont introduit la classe $\mathcal{E}(\infty)$ des groupes G tels que chaque ensemble infini d'éléments de G contient une paire $\{x, y\}$ vérifiant $[x,_k y] = 1$, pour un entier positif $k = k(x, y)$. Elles ont prouvé que si un groupe G résoluble de type fini satisfait la condition $\mathcal{E}(\infty)$, alors il est extension d'un groupe fini par un groupe nilpotent ; ceci entraîne que l'hypercentre $Z^*(G)$ de G est d'indice fini dans G (voir 1.5 de [8]) et si $|G : Z^*(G)| = n$, alors G satisfait la condition $\mathcal{E}(n)$. Il est clair que $(\mathcal{N}, n) \subset \mathcal{E}(n) \subset \mathcal{E}(\infty)$. Ici, nous prouvons que :

Théorème 1.1. *Soit G un groupe résoluble de type fini satisfaisant la condition $\mathcal{E}(n)$, alors $|\frac{G}{Z^*(G)}| \leqslant n^{113\sqrt{n}+2}$.*

Si x est un nombre réel, on note $\lfloor x\rfloor$ le plus grand entier inférieur ou égal à x. Nous prouvons aussi que :

Théorème 1.2. *Soit G un groupe fini satisfaisant la condition $\mathcal{E}(n)$. Alors,*

$$\left|\frac{G}{\mathrm{Fitt}(G)}\right| \leqslant \left|\frac{G}{Z^*(S)}\right| \leqslant n^{113\sqrt{n}+2} c^{2n^2\cdot\lfloor\log_{16}(n+1)\rfloor} \big\lfloor \log_{16}(n+1)\big\rfloor !,$$

où S est le plus grand sous-groupe normal résoluble de G, $\mathrm{Fitt}(G)$ *le sous-groupe de Fitting de G et c est une constante.*

Dans [1], il est prouvé qu'un groupe fini G satisfaisant la condition $\mathcal{E}(n)$ est nilpotent si $n \leqslant 2$, résoluble si $n \leqslant 15$. Comme le groupe alterné A_5 satisfait la condition $\mathcal{E}(16)$ et le groupe symétrique S_3 satisfait la condition $\mathcal{E}(3)$, ces bornes ne peuvent pas être améliorées. Dans [5], Endimioni a prouvé qu'un groupe fini G satisfaisant la condition $(\mathcal{N}, n)$ est nilpotent si $n \leqslant 3$, résoluble si $n \leqslant 20$. Le groupe alterné A_5 satisfait la condition $(\mathcal{N}, 21)$ et le groupe symétrique S_3 satisfait la condition $(\mathcal{N}, 3)$. Si K est un groupe et n un entier positif, on note $\mathrm{Hol}(K)$ l'holomorphe de K, $\mathbb{C}_n$ le groupe cyclique d'ordre n et $Z(K)$ le centre de K. Ici, nous prouvons

Proposition 1.3. *Soit G un groupe fini non trivial satisfaisant la condition $\mathcal{E}(15)$. Si $Z(G) = 1$, alors G est isomorphe à un sous-groupe de l'un des groupes suivants* :

(1) $\mathrm{Hol}(\mathbb{C}_p)$, *où* $p \in \{7, 11, 13\}$.
(2) $\mathrm{Hol}(\mathbb{C}_5) \times \mathrm{Hol}(\mathbb{C}_3)$.
(3) $\langle x, a, b, c \mid x^7 = a^2 = b^2 = c^2 = [a, c] = [b, c] = [a, b] = 1, [x, a] = ab, [x, b] = bc, [x, c] = a\rangle$.
(4) *Un* $\{2, 3\}$*-groupe.*

Proposition 1.4. *Soit G un groupe fini non nilpotent. Alors, $G \in \mathcal{E}(3)$ si, et seulement si, $\frac{G}{Z^*(G)} \cong S_3$; et $G \in \mathcal{E}(4)\backslash\mathcal{E}(3)$ si, et seulement si, $\frac{G}{Z^*(G)}$ est isomorphe au groupe alterné A_4.*

Nous obtenons aussi une caractérisation du groupe alterné A_5.

Théorème 1.5. *Un groupe fini simple non abélien satisfaisant la condition $\mathcal{E}(16)$ est isomorphe au groupe alterné A_5.*

2. Groupes résolubles de type fini satisfaisant la condition $\mathcal{E}(n)$

Dans cette section, nous prouvons le Théorème 1.1. Si X est un sous-ensemble non vide d'un groupe G et H un sous-groupe de G, on note $C_H(X)$ le centralisateur de X dans H, et $N_H(X)$ le normalisateur de X dans H. Si $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, on définit $C_H(X) = C_H(x_1, \ldots, x_n)$. Nous commençons par un résultat qui est peut-être bien connu.

Lemme 2.1. *Soient n un entier positif, G un groupe et H un sous-groupe de G sans éléments (autre que 1) d'ordre fini divisant n. Si $h \in H$ et x est un élément du normalisateur de H dans G tel que $[h, x^n] = 1$ et $[h,_k x] = 1$ pour un certain $k = k(x, h) \in \mathbb{N}$, alors $[h, x] = 1$.*

Démonstration. Soit k le plus petit entier vérifiant $[h,_k x] = 1$. Supposons $k \geqslant 2$. Notons que $x^n \in C_G(x, h)$, donc $[[h,_{(k-2)} x], x^n] = 1$ et en utilisant les identités classiques sur les commutateurs, on peut écrire $1 = [[h,_{(k-2)} x], x^n] = [h,_{(k-1)} x]^n z$; le facteur z est dans la clôture normale de $[[h,_{(k-1)} x], x] = 1$, donc $z = 1$. Le commutateur $[h,_{(k-1)} x]$ dont l'ordre divise n est dans H ; on en déduit qu'il est égal à 1, ce qui est contradictoire avec l'hypothèse selon laquelle k est le plus petit entier tel que $[h,_k x] = 1$. $\square$

Lemme 2.2. *Soient G un groupe fini satisfaisant la condition $\mathcal{E}(n)$, Q un Π-sous-groupe de G (Π étant un ensemble des nombres premiers) et x un Π'-élément de $N_G(Q)$. Alors, $|Q : C_Q(x)| \leqslant n$.*

Démonstration. Soit $|Q : C_Q(x)| = k$, donc il existe k éléments $y_1, \ldots, y_k$ dans Q tels que $y_i y_j^{-1} \notin C_Q(x)$, pour $i \neq j$. Considérons l'ensemble des k éléments $\{x^{y_1}, \ldots, x^{y_k}\}$. Supposons $k > n$; il existe alors deux entiers différents $i, j \in \{1, \ldots, k\}$ tels que $[x^{y_i},_t x^{y_j}] = 1$, pour un certain $t \in \mathbb{N}$, et donc $[x^{y_i y_j^{-1}},_t x] = 1$. D'où $[[x, y_i y_j^{-1}],_{(t-1)} x] = 1$. D'après le Lemme 2.1, $[[x, y_i y_j^{-1}], x] = 1$, et ainsi $[[y_i y_j^{-1}, x], x] = 1$. Encore d'après le

Lemme 2.1, $[y_i y_j^{-1}, x] = 1$, ce qui est contradictoire avec la relation $y_i y_j^{-1} \notin C_Q(x)$. Par suite, $k \leqslant n$. $\square$

Si L et M sont deux sous-groupes d'un groupe G, on pose $[L, M] = \langle [x, y] \mid x \in L$ et $y \in M\rangle$. Plus généralement, k étant un entier non négatif, on définit $[L,_k M]$ par $[L,_0 M] = L$ et $[L,_{(k+1)} M] = [[L,_k M], M]$. Aussi si x est un élément de G, on définit $[L, x]$ par $\langle [a, x] \mid a \in L\rangle$.

Lemme 2.3. *Soit G une extension d'un p-groupe abélien élémentaire $R \neq 1$ par un p'-sous-groupe abélien $X \neq 1$ tels que X opère fidèlement sur R et $R = [R, X]$. Si G satisfait la condition $\mathcal{E}(n)$, alors $|X| \leqslant n - 1$ et $|R| \leqslant n^2$.*

Démonstration. Par le théorème de Maschke, R se décompose en un produit direct de sous-groupes R_i $(i = 1, \dots, k)$ qui sont X-invariants et qui ne sont pas produit direct de sous-groupes propres X-invariants. Soit $C_i := C_X(R_i)$, $i = 1, \dots, k$. Notons que pour chaque $x \in X$ et $i \in \{1, \dots, k\}$, on a $[R_i, x] = 1$ ou $[R_i, x] = R_i$. S'il existe un élément $x \in X$ tel que $[R_i, x] = R_i$ pour chaque $i \in \{1, \dots, k\}$, alors $R = [R, x]$ et donc $|R| \leqslant n$ d'après le Lemme 2.2. Il résulte du Lemme 3.6(ii) de [13] que $|X| \leqslant n - 1$. D'où on peut supposer $X = \bigcup_{i=1}^{k} C_i$. Considérons une union $V = \bigcup_{i \in I} C_i$ $(I \subset \{1, \dots, k\})$ qui est maximale dans le sens : $X = V \cup C_j \neq V$ pour tout $j \notin I$. Si $y \in X \backslash V$, alors $|\langle R_i \mid i \in I\rangle| = |[R, y]| \leqslant n$ et $y \in \bigcap_{i \notin I} C_i = D$ et donc $V \cup D = X$. Puisque X opère fidèlement sur R, nous avons $(\bigcap_{i \in I} C_i) \cap D = 1$. Par [7], on a aussi $\bigcap_{i \in I} C_i \subseteq D$. Il en résulte que $\bigcap_{i \in I} C_i = 1$. D'où $C_X(T) = 1$ et $|T| \leqslant n$, où $T = \langle R_i \mid i \in I\rangle$, et il résulte du Lemme 3.6(ii) de [13] que $|X| \leqslant n - 1$. Pour prouver $|R| \leqslant n^2$, notons que

$$\frac{1}{|X|} \sum_{x \in X} \dim C_R(x) \leqslant \frac{1}{2} \dim R.$$

(Ici « dim » s'applique à des p-groupes abéliens élémentaires que l'on considère comme espaces vectoriels sur le corps fini d'ordre p.) Si bien qu'il existe un élément $x \in X$ tel que $\dim C_R(x) \leqslant \frac{1}{2} \dim R$. Mais $R = [R, x] \times C_R(x)$ et par le Lemme 2.2, $|[R, x]| \leqslant n$. Il en résulte que $|C_R(x)| \leqslant |[R, x]|$ et donc $|R| \leqslant n^2$. $\square$

Remarque 2.4. Notons que si, dans le Lemme 2.3, X est cyclique, alors la démonstration du lemme implique $|R| \leqslant n$.

Si H et K sont deux groupes, on note $H \rtimes K$ un groupe G qui admet deux sous-groupes H_1 et K_1 tels que $H_1 \cong H$, $K_1 \cong K$, $H_1 \cap K_1 = 1$, $G = H_1 K_1$ et $H_1 \trianglelefteq G$. Si G est un groupe, nous noterons $\mathrm{Aut}(G)$ le groupe de tous les automorphismes de G.

Lemme 2.5. *Supposons que, dans le Lemme 2.3, R soit un p-groupe tel que $p \leqslant n < p^2$. Alors $R \rtimes X$ est isomorphe à $\mathbb{C}_p \rtimes \mathbb{C}_t$, où t est un entier strictement supérieur à 1 et divisant $p - 1$.*

Démonstration. Si X est cyclique, alors, d'après la Remarque 2.4, $|R| \leqslant n$, et puisque $p \leqslant n < p^2$, on a $|R| = p$ et $|X|$ divise $p-1$. Maintenant on montre que X est cyclique. D'après la démonstration du Lemme 2.3, X est isomorphe à un sous-groupe de $\mathrm{Aut}(T)$, où T est un sous-groupe de R tel que $|T| \leqslant n$, donc $|T| = p$. Alors $\mathrm{Aut}(T)$ est cyclique, ce qui entraîne que X est cyclique. □

Lemme 2.6. *Supposons que, dans le Lemme* 2.3, $n \leqslant 15$. *Alors* $R \rtimes X$ *est isomorphe à l'un des groupes suivants* :

(1) $\mathbb{C}_p \rtimes \mathbb{C}_t$ *où* $p \in \{5, 7, 11, 13\}$ *et* t *est un entier strictement supérieur à* 1 *et divisant* $p-1$;
(2) $(\mathbb{C}_2 \times \mathbb{C}_2) \rtimes \mathbb{C}_3$ *ou* $(\mathbb{C}_2 \times \mathbb{C}_2 \times \mathbb{C}_2) \rtimes \mathbb{C}_7$;
(3) $\mathbb{C}_3 \rtimes \mathbb{C}_2$, $(\mathbb{C}_3 \times \mathbb{C}_3) \rtimes \mathbb{C}_2$, $(\mathbb{C}_3 \times \mathbb{C}_3) \rtimes \mathbb{C}_4$, $(\mathbb{C}_3 \times \mathbb{C}_3) \rtimes (\mathbb{C}_2 \times \mathbb{C}_2)$, $(\mathbb{C}_3 \times \mathbb{C}_3) \rtimes \mathbb{C}_8$ *ou* $(\mathbb{C}_3 \times \mathbb{C}_3 \times \mathbb{C}_3) \rtimes (\mathbb{C}_2 \times \mathbb{C}_2)$.

Démonstration. Par le Lemme 2.3, on a $|X| \leqslant n - 1 \leqslant 14$ et $|X|$ divise $|\mathrm{Aut}(R)|$. Si p divise l'ordre de R alors, par le Lemme 2.2, $p \leqslant 15$. Ainsi $p \in \{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$. Soit $p \in \{5, 7, 11, 13\}$. D'après le Lemme 2.3, on a $|R| = p$, et donc X est un groupe cyclique et $|X|$ divise $p-1$.

Maintenant supposons $p = 2$. D'après la démonstration du Lemme 2.3, X est cyclique ou bien X est un $2'$-sous-groupe abélien de $\mathrm{Aut}(T)$, où T est un 2-groupe abélien élémentaire d'ordre divisant 8. Mais dans ce cas, chaque $2'$-sous-groupe abélien de $\mathrm{Aut}(T)$ est cyclique et donc, d'après la Remarque 2.4, $|R| \in \{2, 4, 8\}$. Si $|R| = 2$ alors $|X| = 1$, ce qui est impossible. Si $|R| = 4$ alors $|X| = 3$, et si $|R| = 8$ alors $|X| = 3$ ou $|X| = 7$. Mais il est facile de voir que le cas où $|R| = 8$ et $|X| = 3$ n'est pas possible.

Soit $p = 3$. D'après la démonstration du Lemme 2.3, X est cyclique ou X est un $3'$-sous-groupe abélien de $\mathrm{Aut}(T)$, où T est un 3-groupe abélien élémentaire d'ordre divisant 9. Si $|T| = 3$ alors $|X| = 2$, et si $|T| = 9$ alors X est un groupe cyclique d'ordre 2, 4 ou 8 ou bien un groupe abélien élémentaire d'ordre 4. Si X est cyclique, le Lemme 2.3 implique $|R| \in \{3, 9\}$. Alors dans ce cas, $R \rtimes X$ est isomorphe à $\mathbb{C}_3 \rtimes \mathbb{C}_2$, $(\mathbb{C}_3 \times \mathbb{C}_3) \rtimes \mathbb{C}_2$, $(\mathbb{C}_3 \times \mathbb{C}_3) \rtimes \mathbb{C}_4$ ou $(\mathbb{C}_3 \times \mathbb{C}_3) \rtimes \mathbb{C}_8$. Donc il reste à considérer le cas où $|R| \in \{9, 27, 81\}$ et $X \cong \mathbb{C}_2 \times \mathbb{C}_2$. Supposons que $|R| = 81$. D'après la démonstration et les notations du Lemme 2.3, on a $X = \bigcup_{i=1}^{k} C_X(R_i)$. Il est clair que $k > 2$ et puisque $|R_i| \geqslant 3$, on a $k \leqslant 4$. Si $k = 3$, alors on peut supposer $|R_1| = 9$ et $|R_2| = |R_3| = 3$. Mais $1 < C_X(R_i) < X$ pour chaque $i \in \{1, 2, 3\}$. Donc il existe un élément $x \in X$ tel que $x \notin R_1 \cup R_2$. D'où $C_R(x) = R_3$, et on a $|R : C_R(x)| = 27 > 15$, ce qui est contradictoire, d'après le Lemme 2.2. Si $k = 4$, alors $|R_i| = 3$ pour chaque $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Puisque X a seulement 4 sous-groupes propres, il existe un élément $x \in X$ tel que $x \notin \bigcup_{i \neq j, i=1}^{4} R_i$, pour un $j \in \{1, 2, 3, 4\}$. D'où $C_R(x) = R_j$ et on a $|R : C_R(x)| = 27$, ce qui est contradictoire (puisque d'après le Lemme 2.2, $|R : C_R(x)| \leqslant 15$). Ainsi $|R| = 9$ ou bien 27, ce qui achève la démonstration du lemme. □

Si p est un nombre premier et G un groupe fini, on note $O^p(G)$ le plus petit sous-groupe normal K de G tel que G/K soit un p-groupe.

Lemme 2.7. *Soient G un groupe fini satisfaisant la condition $\mathcal{E}(n)$ et p un nombre premier divisant $|G|$ tel que $p > n$. Si $Q = O^p(G)$ et si P un p-sous-groupe de Sylow de G, alors $G = P \times Q$.*

Démonstration. Supposons qu'il existe un élément x de P tel que $x \notin C_G(Q)$. Notons que d'après le Corollaire 2.3 de [1], Q est un p'-sous-groupe de G de sorte que $P \cap Q = 1$ et $G = QP$. Considérons le sous-groupe $K = \langle x\rangle Q$. Alors, $\langle x\rangle$ est un p-sous-groupe de Sylow de K et puisque $x \notin C_G(Q)$, $|K : N_K(\langle x\rangle)| > p$. Mais $N_K(\langle x\rangle) = \langle x\rangle C_Q(x)$, d'où

$$\left|K : N_K(\langle x\rangle)\right| = \left|\langle x\rangle Q : \langle x\rangle C_Q(x)\right| = \left|Q : C_Q(x)\right|.$$

Maintenant le Lemme 2.2 implique $|Q : C_Q(x)| \leqslant n$, ce qui est contradictoire avec la relation $p > n$. $\square$

Si n est un entier positif, nous noterons Π_n l'ensemble des nombres premiers p tels que $p \leqslant n$.

Corollaire 2.8. *Si G est un groupe fini satisfaisant la condition $\mathcal{E}(n)$, alors :*

(i) *L'ensemble des Π_n-éléments de G est un sous-groupe D de G.*
(ii) *L'ensemble des Π_n'-éléments de G est un sous-groupe nilpotent M de G. En particulier, $G = D \times M$.*
(iii) *Si $Z(G) = 1$, alors G est un Π_n-groupe.*

Démonstration. (i) Voir le Corollaire 2.3 de [1].

(ii) D'après le Lemme 2.2 de [1], G est p-nilpotent pour tout premier $p > n$, donc D possède un complément nilpotent M, puisque $G/D = MD/D \cong M/(M \cap D) \cong M$. Par le Lemme 2.7, G est le produit de ces deux sous-groupes, $G = D \times M$.

(iii) Résulte de la partie (ii). $\square$

Si p est un nombre premier et G est un groupe fini, on note $O_p(G)$ le p-sous-groupe engendré par tous les p-sous-groupes normaux de G, et $O_{p'}(G)$ le sous-groupe engendré par tous les p'-sous-groupes normaux de G. Nous noterons $\Phi(G)$ le sous-groupe de Frattini de G.

Lemme 2.9. *Soit G un groupe résoluble non nilpotent fini satisfaisant la condition $\mathcal{E}(n)$. Supposons que $O_{p'}(G) = 1$, pour un nombre premier p divisant $|G|$. Si $\widetilde{G} = G/Z^*(G)$, alors*

(a) $|\widetilde{G}| \leqslant n^{\frac{13}{2}\log_2 n}$.
(b) *Si $p \leqslant n < p^2$ alors $\widetilde{G} \cong \mathbb{C}_p \rtimes \mathbb{C}_t$, où t est un entier positif strictement supérieur à* 1 *et divisant $p - 1$. En particulier, $|\widetilde{G}| \leqslant n^2$.*
(c) *Si $n \leqslant 15$ et $p = 2$, alors*
 (1) $\widetilde{G} \cong \langle x, a, b, c \mid x^7 = a^2 = b^2 = c^2 = [a, c] = [b, c] = [a, b] = 1, [x, a] = ab, [x, b] = bc, [x, c] = a\rangle$.

(2) $\widetilde{G} \cong A_4$ *ou le groupe symétrique* S_4.

(d) *Si* $n \leqslant 15$ *et* $p = 3$, *alors* $\widetilde{G}$ *est un* $\{2,3\}$*-groupe à centre trivial tel que* $O_{3'}(\widetilde{G}) = 1$. *Si* $n \leqslant 4$ *alors* $\widetilde{G} \cong S_3$.

Démonstration. (a) Puisque $O_{p'}(G) = 1$, le sous-groupe de Fitting de G est égal à $O_p(G) = P$ et G/P opère fidèlement sur $\overline{P} = P/\Phi(P)$ (voir [6, Théorème 6.3.4]). Notons que $Z^*(G) \leqslant P$. Maintenant $\overline{P}$ est un p-sous-groupe normal abélien élémentaire de $\overline{G} = G/\Phi(P)$, $\overline{P} = O_p(\overline{G})$ et $C_{\overline{G}}(\overline{P}) = \overline{P}$. Soit $Q/\overline{P}$ le socle de $\overline{G}/\overline{P}$ de sorte que $Q/\overline{P}$ est un p'-sous-groupe. Nous pouvons écrire $Q = \overline{P}X$, où X est un p'-sous-groupe abélien de Q. Soit $R := [\overline{P}, Q]$ de sorte que $\overline{P} := R \times C_{\overline{P}}(Q)$. Si $C := C_{\overline{G}}(R)$, alors $C \cap Q$ centralise $\overline{P}$ et donc $C \cap Q = \overline{P}$. Il en résulte que $C_{\overline{G}}(R) = \overline{P}$ et donc $\overline{G}/\overline{P}$ opère fidèlement sur R. Maintenant R et X satisfont les conditions du Lemme 2.3 et donc $|R| \leqslant n^2$. On a aussi :

(1) G/P opère fidèlement sur R. Il s'ensuit par le Lemme 3.6(iv) de [13] que $|G/P| \leqslant n^{1+2\log_2 n}$.

(2) Soit T un p'-sous-groupe de Hall de sorte que T est un p'-groupe résoluble opérant fidèlement sur R. Il s'ensuit par le Lemme 3.6(iii) de [13] que $|T| \leqslant \frac{1}{2}n^{9/2}$ et T est engendré par $\lfloor \frac{9}{2}\log_2 n - 1 \rfloor$ éléments. Notons que $C_P(T) \leqslant Z^*(G)$ car si S est un p-sous-groupe de Sylow de G, alors $G = ST$ et $[C_P(T),_k G] = [C_P(T),_k S] = 1$, pour un entier positif k. Si T est engendré par d éléments, alors

$$\left|PZ^*(G)/Z^*(G)\right| \leqslant \left|P : C_P(T)\right| \leqslant n^d,$$

d'après le Lemme 2.2. En particulier, $|PZ^*(G)/Z^*(G)| \leqslant n^{\frac{9}{2}\log_2 n - 1}$.

D'après ce qui précède, il est facile de voir que $|\widetilde{G}| \leqslant n^{\frac{13}{2}\log_2 n}$.

(b) Soient $\widetilde{P} = PZ^*(G)/Z^*(G) = P/Z^*(G)$ et $\widetilde{T} = TZ^*(G)/Z^*(G)$. D'après le Lemme 2.2 de [1], $p \leqslant n$, puisque G n'est pas nilpotent. Maintenant supposons que $p \leqslant n < p^2$. Il s'ensuit, d'après le Lemme 2.5, que $|R| = p$. Puisque $G/P \cong \widetilde{G}/\widetilde{P}$ est un p'-sous-groupe, $\widetilde{T} \cong \widetilde{G}/\widetilde{P}$ est un groupe cyclique d'ordre $p-1$ et $|\widetilde{P}| = p$. D'où $\widetilde{G}$ est isomorphe à $\mathbb{C}_p \rtimes \mathbb{C}_t$, où t est un entier positif strictement supérieur à 1 et divisant $p-1$.

(c) Si $p = 2$ alors $R \cong \mathbb{C}_2 \times \mathbb{C}_2$ ou $\mathbb{C}_2 \times \mathbb{C}_2 \times \mathbb{C}_2$. D'après le Lemme 2.6, T est isomorphe à $\mathbb{C}_3$ ou $\mathbb{C}_7$. Ainsi $|\widetilde{P}| \in \{2,4,8\}$. D'où $\widetilde{G}$ est un $\{2,3\}$-groupe ou un $\{2,7\}$-groupe. Maintenant supposons que $\widetilde{G}$ est un $\{2,7\}$-groupe. Il s'ensuit que $\widetilde{G}/\widetilde{P}$ est isomorphe à un $\{2,3\}$-sous-groupe de $GL_3(2)$, le groupe linéaire général de degré 3 sur le corps d'ordre 2. Mais chaque $\{2,7\}$-sous-groupe de $GL_3(2)$ dont l'ordre est divisible par 7 est un groupe cyclique d'ordre 7. Ainsi $|\widetilde{G}| \in \{14, 28, 56\}$. Puisque $Z(\widetilde{G}) = 1$ et $1 \neq O_2(\widetilde{G})$ est un 2-sous-groupe de Sylow, il est facile de voir que $\widetilde{G}$ est isomorphe à

$$\bigl\langle x, a, b, c \bigm| x^7 = a^2 = b^2 = c^2 = [a,c] = [b,c] = [a,b] = 1,\ [x,a] = ab,$$
$$[x,b] = bc,\ [x,c] = a \bigr\rangle.$$

Maintenant supposons que $\widetilde{G}$ est un $\{2,3\}$-groupe. Donc $K = \widetilde{G}/\widetilde{P}$ est isomorphe à un $\{2,3\}$-sous-groupe de $GL_3(2)$ tel que $O_2(K) = 1$. Il en résulte que $|K| \in \{3,6\}$ et donc $|\widetilde{G}| \in \{12, 24, 48\}$. Maintenant puisque $Z(\widetilde{G}) = O_{2'}(\widetilde{G}) = 1$, il est facile de voir que $\widetilde{G}$ est isomorphe au groupe alterné A_4 ou bien $\widetilde{G}$ est isomorphe à S_4.

(d) Si $p = 3$ alors $R \cong \mathbb{C}_3$ ou $\mathbb{C}_3 \times \mathbb{C}_3$ ou $\mathbb{C}_3 \times \mathbb{C}_3 \times \mathbb{C}_3$. Mais T est un $3'$-sous-groupe résoluble de $\mathrm{Aut}(R)$. Si $|R| \in \{3,9\}$ alors $\mathrm{Aut}(R)$ est un $\{2,3\}$-groupe donc $\widetilde{G}$ est un $\{2,3\}$-groupe. Notons que si $n \leqslant 4$ alors $|R| = 3$, $|T| = 2$ et $|\widetilde{G}/\widetilde{P}| = 2$. Mais $|\widetilde{P}| \leqslant 4$ et donc $|\widetilde{P}| = 3$. D'où $\widetilde{G} \cong S_3$. Si $|R| = 27$ alors $\mathrm{Aut}(R) \cong GL_3(3)$, le groupe linéaire général de degré 3 sur le corps d'ordre 3. Supposons que $\widetilde{G}$ n'est pas un $\{2,3\}$-groupe, il s'ensuit que T est un groupe cyclique d'ordre 13 ou 26 (notons que ces groupes sont les seuls $\{2,13\}$-sous-groupes de $GL_3(3)$). Mais l'ordre de R divise celui de $\widetilde{P}$ et $|\widetilde{P}| \leqslant |P : C_P(T)| \leqslant 15$ ce qui est contradictoire (puisque $|R| = 27$ et $|R| \leqslant |\widetilde{P}| \leqslant 15$) et achève la démonstration du lemme. $\square$

Lemme 2.10. *Soit G un groupe résoluble fini à centre trivial satisfaisant la condition $\mathcal{E}(n)$. Supposons que p, q soient deux nombres premiers distincts divisant l'ordre de G et tels que $r \leqslant n < r^2$ pour $r \in \{p, q\}$. Alors $G = H_p$ ou bien $G = H_q$, où, pour chaque nombre premier r, on note H_r le sous-groupe de G satisfaisant $\frac{H_r}{O_{r'}(G)} = Z^*(\frac{G}{O_{r'}(G)})$.*

Démonstration. Supposons que $G \neq H_p$ et $G \neq H_q$. Il s'ensuit, d'après le Lemme 2.9, que $G/H_p \cong \mathbb{C}_p \rtimes \mathbb{C}_t$ et $G/H_q \cong \mathbb{C}_q \rtimes \mathbb{C}_r$, où $t > 1$ et $r > 1$ sont deux entiers divisant $p-1$ et $q-1$, respectivement. Puisque $p \neq q$, on en déduit que $H_p \neq H_q$. Si $H_p < H_q$, alors G/H_q est abélien. Puisque le centre de G/H_q est trivial, on a $G = H_q$ et pour une raison similaire, si $H_q < H_p$, on a $H_p = G$. D'où $H_p \nleqslant H_q$ et $H_q \nleqslant H_q$. Supposons $p > q$. Puisque $\overline{G} = G/(H_p \cap H_q)$ est isomorphe à un sous-groupe de $G/H_p \times G/H_q$ et les centres de ces groupes quotients sont triviaux, on a $Z(\overline{G}) = 1$. Supposons que $\widetilde{G}$ soit l'image de $\overline{G}$ dans le groupe $G/H_p \times G/H_q$. Donc $\widetilde{G}$ a un p-sous-groupe de Sylow normal P. Notons que $|P| = p$. Soit H un p'-sous-groupe de Hall de $\widetilde{G}$ et $K = C_H(P)$. Donc H/K est un groupe cyclique non trivial d'ordre divisant $p-1$ et $K \lhd \widetilde{G}$. Supposons que $H = K\langle(a,b)\rangle$, où $(a,b) \in \widetilde{G} \leqslant G/H_p \times G/H_q$ et $P = \langle(g,1)\rangle$, où $g \in G/H_p$. Puisque (a,b) ne commute pas avec $(g,1)$, on a

$$\operatorname{pgcd}\bigl(|a|, |g|\bigr) = 1. \tag{I}$$

Donc $C_P((a,b)) = 1$. Il est facile de voir que $K \leqslant \widetilde{G} \cap (1 \times G/H_q)$, puisque $G/H_p \cong \mathbb{C}_p \rtimes \mathbb{C}_t$ et $K = C_H(P)$. Mais G/H_q est un facteur de $\widetilde{G}$, donc q divise l'ordre de K et donc K a un q-sous-groupe de Sylow normal Q engendré par un élément $x \in G/H_q$. Ainsi $Q \lhd \widetilde{G}$. Si $[Q, (1,b)] = 1$, alors $Q \leqslant Z(\widetilde{G}) = 1$, ce qui est contradictoire (puisque $Q \neq 1$), donc $C_Q((1,b)) = 1$, puisque $\langle Q, (1,b)\rangle$ est isomorphe à un sous-groupe non abélien de $\mathbb{C}_q \rtimes \mathbb{C}_r$. Notons que

$$\operatorname{pgcd}\bigl(|b|, q\bigr) = 1. \tag{II}$$

Maintenant considérons l'ensemble

$$\left\{(a,b)^{(g^i,x^j)} \;\middle|\; i=0,1,\ldots,p-1,\ j=0,1,\ldots,q-1\right\}.$$

Puisque G satisfait la condition $\mathcal{E}(n)$, il existe deux paires distinctes (i,j) et (i',j') telles que $[(a,b)^{(g^i,x^j)},_k (a,b)^{(g^{i'},x^{j'})}]=1$, pour un entier positif k. D'où $[a^{g^i},_k a^{g^{i'}}]=1$ et $[b^{x^j},_k b^{x^{j'}}]=1$. Maintenant comme dans la démonstration du Lemme 2.2, puisque $(i,j)\neq(i',j')$, on a $[b,x]=1$ ou bien $[a,g]=1$, d'où une contradiction (d'après (I) ou bien (II)) qui achève la démonstration du lemme. □

Maintenant nous sommes prêts à prouver le Théorème 1.1.

Démonstration du Théorème 1.1. Soit $\overline{G}:=\frac{G}{Z^*(G)}$. D'après le Théorème 1 de [11], $\overline{G}$ est fini. Soit $\frac{H_p}{O_{p'}(\overline{G})}$ l'hypercentre de $\frac{\overline{G}}{O_{p'}(\overline{G})}$, où p est un nombre premier divisant $|G|$. D'après le Corollaire 2.8, $\overline{G}$ est un Π_n-groupe. Puisque $\overline{G}$ est fini, il existe un entier positif m tel que

$$[H_p,_m \overline{G}]\leqslant O_{p'}(\overline{G}),$$

pour tout $p\in\Pi_n$. Ainsi

$$\Bigl[\bigcap_{p\in\Pi_n} H_p,_m \overline{G}\Bigr]\leqslant \bigcap_{p\in\Pi_n} O_{p'}(\overline{G})=1,$$

et donc $\bigcap_{p\in\Pi_n} H_p\leqslant Z^*(\overline{G})=1$. Supposons que $\Sigma=\{p\in\Pi_n \mid p^2>n\}$ et $\Gamma=\Pi_n-\Sigma$. D'après le Lemme 2.10, il existe un sous-ensemble Λ de Σ tel que $|\Lambda|\leqslant 1$ et $\bigcap_{p\in\Gamma\cup\Lambda} H_p=1$. D'où $|\overline{G}|\leqslant\prod_{p\in\Gamma\cup\Lambda}|\overline{G}/H_p|$ et d'après le Lemme 2.9, on a

$$|\overline{G}|\leqslant n^{\pi(\sqrt{n})(\frac{13}{2}\log_2 n)}\cdot n^2,$$

où $\pi(\sqrt{n})$ est le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à $\sqrt{n}$. D'après le Théorème 4.6 de [2], on a $\pi(\sqrt{n})<6\frac{\sqrt{n}}{\ln(\sqrt{n})}=12\frac{\sqrt{n}}{\ln n}$. Il s'ensuit que

$$|\overline{G}|\leqslant n^{12\frac{\sqrt{n}}{\ln n}(\frac{13}{2}\log_2 n)+2}.$$

Maintenant il est facile de voir que $|\overline{G}|\leqslant n^{113\sqrt{n}+2}$; ce qui achève la démonstration. □

Démonstration de la Proposition 1.3. (La démonstration suivante fait à plusieurs reprises appel au Lemme 3.1 qui ne sera établi qu'au Section 3 ; le lecteur pourra se convaincre qu'il n'y a pas là de cercle vicieux, la preuve de ce lemme n'utilisant pas la Proposition 1.3.) Puisque G satisfait la condition $\mathcal{E}(15)$, G est résoluble (voir [1, Théorème 1.2]). D'après la démonstration du Théorème 1.1, $\bigcap_{p\in\Pi_{15}} H_p=1$. Mais le Lemme 2.10 implique que

$H_2 \cap H_3 \cap H_p = 1$, pour un nombre premier $p \in \{5, 7, 11, 13\}$, et G est alors isomorphe à un sous-groupe de $G/H_2 \times G/H_3 \times G/H_p$. D'après la démonstration du Lemme 2.9, G/H_2 est un $\{2, 3\}$-groupe ou est isomorphe à $E_8 \rtimes \mathbb{C}_7$ ($E_8 = \mathbb{C}_2 \times \mathbb{C}_2 \times \mathbb{C}_2$). Supposons G/H_2 est isomorphe à $E_8 \rtimes \mathbb{C}_7$. D'après le Lemme 2.9, G/H_3 est un $\{2, 3\}$-groupe, ce qui implique $H_3 \nleqslant H_2$. Notons que G/H_2 a un sous-groupe isomorphe à E_8 et que c'est le seul sous-groupe normal non trivial et propre de G/H_2. Mais, d'après le Lemme 2.9, 7 ne divise pas l'ordre de G/H_3, donc $G/(H_2 \cap H_3) \cong K \times G/H_2$, où K est un sous-groupe de G/H_3. Puisque $Z(\frac{G}{H_2 \cap H_3}) = 1$, on a $Z(K) = 1$. Si K est non trivial, alors K est un groupe non nilpotent, et donc K ne satisfait pas la condition $\mathcal{E}(2)$, d'après le Théorème 1.1 de [1]. Mais aussi G/H_2 ne satisfait pas la condition $\mathcal{E}(7)$, donc le Lemme 3.1 montre que $G/(H_2 \cap H_3)$ ne satisfait pas la condition $\mathcal{E}(23)$, ce qui est contradictoire avec l'hypothèse selon laquelle G satisfait la condition $\mathcal{E}(15)$. Ainsi $K = 1$, d'où $H_2 \leqslant H_3$ et $H_2 \cap H_p = 1$. Puisque, d'après le Lemme 2.9, G/H_p est isomorphe à un sous-groupe de $\mathrm{Hol}(\mathbb{C}_p)$ et $|G/H_2| = 56$, on a $H_p \nleqslant H_2$. Supposons que $H_2 \nleqslant H_p$. Puisque $H_2 \leqslant H_p H_2 \trianglelefteq G$, $G = H_2 H_p$ ou $|H_2 H_p / H_2| = 8$. Si $|H_2 H_p / H_2| = 8$, alors $|G/H_2 H_p| = 7$. Il en résulte que $p = 7$ et $|H_2 H_p / H_p|$ divise 6. Mais $H_2 H_p / H_p \trianglelefteq G/H_p$ et aussi G/H_p admet un sous-groupe normal d'ordre 7. Ainsi G/H_p est abélien, et il en résulte que $G = H_p$, ce qui est contradictoire avec la relation $H_2 \nleqslant H_p$. Alors $G = H_2 H_p$ et $G/(H_2 \cap H_p) \cong G/H_2 \times G/H_p$. D'après le Lemme 3.1, $G/(H_2 \cap H_p)$ ne satisfait pas la condition $\mathcal{E}(15)$, ce qui est contradictoire avec l'hypothèse selon laquelle G satisfait la condition $\mathcal{E}(15)$. Par suite, $H_2 \leqslant H_p$ et $H_2 = H_2 \cap H_p = 1$. Alors $G \cong G/H_2 \cong E_8 \rtimes \mathbb{C}_7$.

Supposons que G/H_2 est un $\{2, 3\}$-groupe. Si $H_2 \leqslant H_p$ ou $H_3 \leqslant H_p$ alors G est isomorphe à un sous-groupe de $G/H_2 \times G/H_3$ qui est, d'après le Lemme 2.9, un $\{2, 3\}$-groupe et donc G est un $\{2, 3\}$-groupe. Maintenant supposons que $H_2 \nleqslant H_p$ et $H_3 \nleqslant H_p$. Supposons que $H_p \nleqslant H_2$. Considérons $\overline{G}$ l'image du monomorphisme de $G/(H_2 \cap H_p)$ dans $G/H_2 \times G/H_p$ qui à $g(H_2 \cap H_p)$ associe (gH_2, gH_p). D'après le Lemme 2.9, G/H_2 contient un sous-groupe normal unique d'ordre 4 et il n'admet aucun élément d'ordre 6, aussi G/H_p contient un sous-groupe normal unique d'ordre p. Il en résulte qu'il existe des sous-groupes normaux K et M dans $\overline{G}$ et un élément $(x, y) \in \overline{G}$ tels que $|x| = 3$, $(|y|, p) = 1$, $|K| = 4$, $|M| = p$, $C_K((x, y)) = 1$, $C_M((x, y)) = 1$. Maintenant considérons l'ensemble $\{(x, y)^{(g,h)} \mid (g, h) \in K \times M\}$. Comme ci-dessus, on peut obtenir une contradiction. Il en résulte que $H_p \leqslant H_2$, et G est donc un sous-groupe de $G/H_3 \times G/H_p$. Si $H_p \leqslant H_3$ alors G est isomorphe à un sous-groupe de $\mathrm{Hol}(\mathbb{C}_p)$, d'après le Lemme 2.9. Si bien que l'on peut supposer que $H_p \nleqslant H_3$. Soit $\phi(G) = \widetilde{G}$ où $\phi : G \to G/H_3 \times G/H_p$ avec la loi $\phi(g) = (gH_3, gH_p)$ pour chaque $g \in G$. Il existe un élément $\phi(g) = (gH_3, gH_p)$ tel que $R = \langle \phi(g) \rangle$ soit le seul p-sous-groupe de Sylow de $\widetilde{G}$ d'ordre p. Supposons que $K = C_H(R)$, où H est un p'-sous-groupe de Hall de $\widetilde{G}$. Alors $K \lhd \widetilde{G}$ et il est facile de voir que K est aussi normal dans $G/H_3 \times G/H_p$. Puisque R ne commute pas avec un élément de la forme (xH_3, xH_p), où $(1, xH_p) \notin R$, on a $K \leqslant G/H_3 \times 1$. On note que H/K est un groupe cyclique tel que $|H/K|$ divise $p - 1$. Puisque $p \in \{5, 7, 11, 13\}$, $|H/K|$ divise 12 (le cas où $p = 11$ et $|H/K| = 10$ n'est pas possible, puisque dans ce cas, $\widetilde{G}$ a un sous-groupe isomorphe à $T = G/H_3 \times (\mathbb{C}_{11} \rtimes \mathbb{C}_5)$. Alors T satisfait la condition $\mathcal{E}(15)$, ce qui d'après le Lemme 3.1, implique que G/H_3 est nilpotent (noter que $\mathbb{C}_{11} \rtimes \mathbb{C}_5$ ne satisfait pas la condition $\mathcal{E}(10)$). Mais $Z(G/H_3) = 1$, donc $G = H_3$, ce qui est contradictoire avec la relation $H_p \nleqslant H_3$). Supposons que $H/K = \langle (aH_3, aH_p)K \rangle$, où

a est un élément de G. Supposons aussi que pgcd$(3, |K|) = 1$, donc K est un 2-groupe. Notons que G est 2-nilpotent, puisque $H_p \leqslant H_2$, donc H_2/H_p est un sous-groupe normal de G/H_p. Mais $H_2 \neq H_p$, puisque G/H_2 est un $\{2,3\}$-groupe et G/H_p est un groupe dont l'ordre est divisible par p. D'où G/H_2 est cyclique et on sait que $Z(G/H_2) = 1$, donc $G = H_2$. Supposons $x = (aH_3, aH_p) = x_1x_2$, où $[x_1, x_2] = 1$, x_1 est un 2-élément et x_2 est un 3-élément. Par hypothèse $x_2 \neq 1$. Puisque $\widetilde{G}$ est 2-nilpotent, on a $O_{2'}(\widetilde{G}) = \langle R, x_2\rangle$. Il s'ensuit que $C_K(O_{2'}(\widetilde{G})) = C_K(x_2) \lhd \widetilde{G}$. Ainsi $C_K(x_2) \leqslant Z^*(\widetilde{G})$ et donc $C_K(x_2) = 1$. Mais $|RK : C_{RK}(x_2)| \leqslant 15$, donc $|K| = |K : C_K(x_2)| \leqslant 2$. D'où $K = 1$, puisque $K \leqslant Z(\widetilde{G}) = 1$. Il en résulte que G est isomorphe à un sous-groupe de $\mathrm{Hol}(\mathbb{C}_p)$. Maintenant supposons que 3 divise $|K|$. Nous prouvons que 3 ne divise pas l'ordre de xK. Supposons que 3 divise $|xK|$. Puisque $\widetilde{G}$ est 2-nilpotent, $G/H_3 \times 1$ est aussi 2-nilpotent et donc K a un 3-sous-groupe de Sylow normal P. Si P_1 est un 3-sous-groupe de Sylow de $G/H_3 \times G/H_p$, alors $T = Z(P_1) \cap P \neq 1$. Puisque $Z(\widetilde{G}) = 1$, il existe un 2-élément $y = (bH_3, bH_p)$ tel que $|T : C_T(y)| \geqslant 3$. Si $(1, bH_p) \notin R$ alors $|R : C_R(y)| = p$, ce qui implique $15 \geqslant |RT : C_{RT}(y)| \geqslant 3p$. Il en résulte que $p = 5$, ce qui est contradictoire, puisque 3 ne divise pas $5 - 1 = 4$. Donc $(1, bH_p) \in R$ et puisque y est un 2-élément, $bH_p = H_p$. Maintenant puisque 3 divise $|xK|$, on a

$$C_R(t) = 1, \tag{1}$$

où $t = (a^{2^n}H_3, a^{2^n}H_p)$ et $|x| = 2^n3^m$ (n, m sont des entiers non négatifs). Il existe un sous-ensemble $\{z_i = (a_iH_3, H_p) \mid i = 1, \ldots, r\}$ de T tel que $|T : C_T(y)| = r \geqslant 3$ et

$$z_iz_j^{-1} \notin C_T(y), \tag{2}$$

pour $i \neq j$. Considérons l'ensemble

$$X := \left\{(ty)^{z_i\phi(g^l)} \;\middle|\; i = 1, \ldots, r,\ l = 1, \ldots, p\right\}.$$

Puisque $\widetilde{G} \in \mathcal{E}(15)$ et $|X| > 15$ (on note que $p > 5$), il existe deux éléments distincts $v = (ty)^{z_i\phi(g^l)}$ et $w = (ty)^{z_j\phi(g^k)}$ tels que $[v,_f w] = 1$ pour un entier positif f. Il en résulte que $z_iz_j^{-1} \in C_T(y)$ et $\phi(g^{l-k}) \in C_R(t)$, ce qui est contradictoire avec la relation (1) ou (2). Par suite $|xK|$ divise 4 ; donc P est un 3-sous-groupe de Sylow de $\widetilde{G}$. Maintenant nous prouvons que $p = 5$. Puisque $P \nleqslant Z^*(\widetilde{G})$, il existe un 2-élément $c = (bH_3, bH_p)$ tel que $|P : C_P(c)| \geqslant 3$. Si $(1, aH_p) \notin R$ alors $C_R(c) = 1$, et donc $15 \geqslant |RP : C_{RP}(c)| \geqslant 3p$, ce qui donne $p = 5$. Alors supposons que P commute avec tous les 2-éléments (uH_3, uH_p) tels que $(1, uH_p) \notin R$. Ainsi il existe un 2-élément $t = (zH_3, zH_p)$ tel que $zH_p = H_p$ et $|P : C_P(t)| \geqslant 3$. Maintenant si $p > 5$ alors, comme ci-dessus, on peut arriver à une contradiction, en considérant l'ensemble

$$\left\{(tx)^{\phi(g^i)t_j} \;\middle|\; i = 1, \ldots, p,\ j = 1, \ldots, r\right\},$$

où $|P : C_P(t)| = r \geqslant 3$ et $\{t_i \mid i = 1, \ldots, r\} \subset P$ tels que $t_it_j^{-1} \notin C_P(t)$ pour $i \neq j$. Avec les mêmes arguments, on peut dire, nous devons avoir $|P : C_P(s)| \leqslant 3$ pour chaque 2-élément s. Il en résulte que $\Phi(P) \leqslant C_P(Q)$, pour un 2-sous-groupe de Sylow Q de $\widetilde{G}$ et donc

$\Phi(P) = 1$. D'où P est un 3-groupe abélien élémentaire. Alors, si $\overline{P}$ est un 3-sous-groupe de Sylow de G/H_3, $\overline{P}$ est abélien élémentaire et $|\overline{P} : C_{\overline{P}}(s)| \leqslant 3$, pour chaque 2-élément s de G/H_3. Il en résulte que $G/H_3 \cong S_3$. Par contre G/H_p est isomorphe à un sous-groupe de $\mathrm{Hol}(\mathbb{C}_p)$ et alors G est isomorphe à un sous-groupe de $\mathrm{Hol}(\mathbb{C}_3) \times \mathrm{Hol}(\mathbb{C}_5)$; ce qui achève la démonstration. □

Démonstration de la Proposition 1.4. Nous suivons les notations du Théorème 1.1. D'après la démonstration du Théorème 1.1, $H_2 \cap H_3 = 1$. D'après le Lemme 2.9 on a $\overline{G} = H_2$ ou $\overline{G}/H_2 \cong A_4$ et $\overline{G} = H_3$ ou $\overline{G}/H_3 \cong S_3$ (notons que $\overline{G} = G/Z^*(G)$ est un groupe fini à centre trivial). D'où $\overline{G}$ est isomorphe à un sous-groupe de $S_3 \times A_4$. Maintenant, en considérant les sous-groupes de $S_3 \times A_4$ qui sont à centre trivial et satisfont la condition $\mathcal{E}(4)$, il est facile de voir que $\overline{G} \cong S_3$ ou A_4. Réciproquement, supposons que $G/Z^*(G) \cong S_3$. Soient $x_1, x_2, x_3, x_4 \in G$. Alors, puisque S_3 satisfait la condition $\mathcal{E}(3)$, il existe $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$ $(i \neq j)$, tels que $[x_{i},_k x_j] \in Z^*(G)$ pour un entier positif k. Ainsi $[x_{i},_k x_j]$ est un élément d'Engel à droite de G (voir [12, Théorème 12.3.7]). D'où $[[x_{i},_k x_j],_s x_j] = 1$, pour un entier positif s, et donc $[x_{i},_{k+s} x_j] = 1$. Avec une démonstration similaire, on peut prouver que, si $G/Z^*(G) \cong A_4$ alors $G \in \mathcal{E}(4)$ (on prouve seulement $A_4 \in \mathcal{E}(4)$). Notons que A_4 est réunion de quatre 3-sous-groupes cycliques de Sylow P_1, P_2, P_3, P_4 et d'un 2-sous-groupe de Sylow Q normal abélien. Soient $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \in A_4$. S'il existe $i \in \{1, \dots, 5\}$ tel que $x_i \in Q$, alors $[[x_j, x_i], x_i] = 1$, pour tout $j \in \{1, \dots, 5\}$. Il s'ensuit que l'on peut supposer que, pour tout $i \in \{1, \dots, 5\}$, $x_i \notin Q$. D'où il existe k, j $(j \neq k)$ et i dans l'ensemble $\{1, \dots, 5\}$ tels que $x_j, x_k \in P_i$. Donc $[x_j, x_k] = 1$ et ainsi, dans chaque cas, il existe i, j $(i \neq j)$ tels que $[[x_j, x_i], x_i] = 1$. □

Corollaire 2.11. *Un groupe fini satisfaisant la condition $\mathcal{E}(3)$ est super-résoluble. A_4 (qui n'est pas super-résoluble) satisfait la condition $\mathcal{E}(4)$.*

Démonstration. Soit G un groupe fini satisfaisant la condition $\mathcal{E}(3)$. D'après le Corollaire 2.8, $G = H \times K$, où H est un $\{2, 3\}'$-groupe nilpotent et K un $\{2, 3\}$-groupe. Si K est nilpotent, G est nilpotent. Donc nous pouvons supposer K est non nilpotent. D'après le Théorème 1.4, $K/Z^*(K) \cong S_3$ et donc K est super-résoluble. Par suite, G est aussi super-résoluble.

Notons que d'après le Théorème 1.4, $A_4 \in \mathcal{E}(4)$ et il n'est pas super-résoluble. □

3. Groupes finis semi-simples satisfaisant la condition $\mathcal{E}(n)$

Dans cette section, nous prouvons le Théorème 1.2. On dit qu'un groupe fini est semi-simple s'il n'admet aucun sous-groupe normal abélien non trivial (on avertit le lecteur que le mot « semi-simple » est habituellement employé dans un autre sens dans la littérature au sujet des groupes simples finis ; pour plus d'information sur ces groupes dans notre sens, voir [12, pp. 89–91]). Le lemme suivant montre que le nombre de facteurs d'un produit direct de groupes qui satisfait la condition $\mathcal{E}(n)$ avec chaque facteur ne satisfaisant pas la condition $\mathcal{E}(m)$, est borné par un entier positif ne dépendant que de n et m.

Lemme 3.1. *Soient $G_1, \dots, G_s$ des groupes. Supposons que G_i ne satisfait pas la condition $\mathcal{E}(n_i)$ pour tout $i \in \{1, \dots, s\}$. Alors $G_1 \times \cdots \times G_s$ ne satisfait pas la condition $\mathcal{E}(m)$, où $m = (n_1 + 1) \cdots (n_s + 1) - 1$.*

Démonstration. Puisque G_i ne satisfait pas la condition $\mathcal{E}(n_i)$, il existe un sous-ensemble X_i de G tel que $|X_i| = n_i + 1$ et pour chaque $k \in \mathbb{N}$ et $x, y \in X_i$ $(x \neq y)$ on a $[x,_k y] \neq 1$. Maintenant considérons l'ensemble $X = X_1 \times \cdots \times X_s$. Soient $a, b \in X$ avec $a \neq b$. Si $a = (a_1, \dots, a_s)$ et $b = (b_1, \dots, b_s)$, alors il existe $i \in \{1, \dots, s\}$ tel que $a_i \neq b_i$ et nous avons $[a_i,_k b_i] \neq 1$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Mais, on a

$$[a,_k b] = \big([a_1,_k b_1], \dots, [a_s,_k b_s]\big)$$

pour tout $k \in \mathbb{N}$. Ainsi, $[a,_k b] \neq 1$, pour tout $k \in \mathbb{N}$. Ceci achève la démonstration du lemme. $\square$

Corollaire 3.2. *Soient $S_1, \dots, S_k$ des groupes finis simples non abéliens. Alors $S_1 \times \cdots \times S_k$ ne satisfait pas la condition $\mathcal{E}(16^k - 1)$.*

Démonstration. Ceci résulte du Lemme 3.1 et du Théorème 1.2 de [1]. $\square$

Maintenant, nous pouvons démontrer le Théorème 1.2.

Démonstration du Théorème 1.2. Soit $\overline{G} := G/S$, donc $\overline{G}$ est un groupe semi-simple. Soit R le CR-radical de centre trivial de $\overline{G}$ (voir page 89 de [12], pour la définition). Alors $R = S_1 \times \cdots \times S_m$ où S_i $(i = 1, \dots, m)$ sont des groupes finis simples non abéliens. Ainsi, d'après le Corollaire 3.2, $n > 16^m - 1$ et donc $m \leqslant \lfloor \log_{16}(n+1) \rfloor$. Soit c un nombre réel positif tel que l'ordre de tout groupe fini simple non abélien satisfaisant la condition $\mathcal{E}(n)$ soit inférieur ou égal à c^{n^2} ; un tel nombre existe d'après le Théorème 2.4 de [1]. Donc l'ordre de R est inférieur ou égal à $c^{n^2 \cdot \lfloor \log_{16}(n+1) \rfloor}$. Notons que $\overline{G}$ opère sur $\{S_1, \dots, S_m\}$; alors, si K est le noyau de cette action, $\overline{G}/K$ est isomorphe à un sous-groupe du groupe symétrique S_m. Par contre, notons que le noyau de l'homomorphisme

$$\phi : K \to \mathrm{Aut}(S_1) \times \cdots \times \mathrm{Aut}(S_m)$$

qui associe $(\phi_g^1, \dots, \phi_g^m)$ à chaque élément $g \in K$, où $\phi_g^i : S_i \to S_i$ et $\phi_g^i(x) = x^g$ pour chaque élément $x \in S_i$ $(i = 1, \dots, m)$, est égal à $C_{\overline{G}}(R)$. Mais d'après le Théorème 3.3.18 de [12], $C_{\overline{G}}(R) = 1$. Donc $|K| \leqslant \prod_{i=1}^m |\mathrm{Aut}(S_i)|$. Puisque S_i est un groupe fini simple, il peut être engendré par deux éléments (voir [3, Théorème B]), d'où $|\mathrm{Aut}(S_i)| \leqslant |S_i|^2$ pour chaque $i \in \{1, \dots, m\}$. Donc

$$|\overline{G}| \leqslant |R|^2 \cdot m! \leqslant c^{2n^2 \cdot \lfloor \log_{16}(n+1) \rfloor} \big\lfloor \log_{16}(n+1) \big\rfloor !.$$

En appliquant le Théorème 1.1 au sous-groupe résoluble S et en notant que $Z^*(S) \leqslant \mathrm{Fitt}(G)$, on obtient

$$\left|\frac{G}{\mathrm{Fitt}(G)}\right| \leqslant \left|\frac{G}{Z^*(S)}\right| \leqslant n^{113\sqrt{n}+2} c^{2n^2 \cdot \lfloor \log_{16}(n+1) \rfloor} \lfloor \log_{16}(n+1) \rfloor !. \qquad \square$$

4. Groupes finis satisfaisant la condition $\mathcal{E}(16)$

Dans cette section, nous prouvons le Théorème 1.5. Si p est un nombre premier, nous noterons $v_p(G)$ le nombre de p-sous-groupes de Sylow d'un groupe fini G.

Lemme 4.1. *Soient G un groupe fini et p un nombre premier divisant l'ordre de G. On suppose que pour toute paire de p-sous-groupes de Sylow de G, l'intersection est triviale. Soient P et Q deux p-sous-groupes de Sylow différents de G. Si $x \in Q \backslash \{1\}$ et si $y \in Z(P)$ est tel que $|y| = p$, alors $[x,_t y] \neq 1$, pour tout entier positif t.*

Démonstration. Supposons qu'il existe un entier positif t vérifiant $[x,_t y] = 1$. Si k est le plus petit entier tel que $[x,_k y] = 1$, alors $k \geqslant 2$. En effet, si $k = 1$, alors $\langle x, y\rangle$ est un p-sous-groupe abélien et $\langle x, y\rangle \leqslant P \cap Q$, ce qui est contradictoire, puisque $1 \neq \langle x, y\rangle$ et d'après l'hypothèse $P \cap Q = 1$. En utilisant les identités classiques sur les commutateurs, on peut écrire $1 = [[x,_{(k-2)} y], y^p] = [x,_{(k-1)} y]^p z$; le facteur z est dans la clôture normale de $[[x,_{(k-1)} y], y] = 1$, donc $z = 1$. D'où $w := [x,_{(k-1)} y]$ est d'ordre p et $[w, y] = 1$. Donc $\langle w, y\rangle$ est un p-sous-groupe de G. Ainsi $\langle w, y\rangle \leqslant P$. Mais, $\langle w, y\rangle = \langle y^v, y\rangle$, où $v := [x,_{(k-2)} y]$. Donc $y^v \in P$ et aussi $y^v \in P^v$. Il en résulte que $P = P^v$, donc $v \in N_G(P)$. Si $k = 2$, alors $v = [x,_0 y] = x$ et $x \in N_G(P)$. Par suite, $\langle x\rangle P$ est un p-sous-groupe de G, ce qui est contradictoire avec l'hypothèse selon laquelle $x \notin P$. Donc on a $k \geqslant 3$. Nous pouvons écrire que

$$1 = \big[[x,_{(k-3)} y], y^p\big] = \big[[x,_{(k-3)} y], y^{p-1}\big][x,_{(k-2)} y]\big[[x,_{(k-2)} y], y^{p-1}\big]$$

et donc

$$1 = \big(v v^y \cdots v^{y^{(p-2)}}\big) v \big(w w^y \cdots w^{y^{(p-2)}}\big). \tag{$*$}$$

Mais $v \in N_G(P)$ et $w, y \in P$, alors d'après $(*)$, $v^p \in P$. Ainsi v est un p-élément de G. Alors, $\langle v\rangle P$ est un p-sous-groupe de G. Il en résulte que $v \in P$. Puisque $y \in Z(P)$, $1 = [v, y] = [x,_{(k-1)} y]$, ce qui est contradictoire avec la définition de k. $\square$

Corollaire 4.2. *Soient G un groupe fini satisfaisant la condition $\mathcal{E}(n)$ et p un nombre premier divisant l'ordre de G tel que pour toute paire de p-sous-groupes de Sylow de G, l'intersection est triviale. Alors $v_p(G) \leqslant n$.*

Démonstration. Supposons que G contienne $n+1$ p-sous-groupes de Sylow et soient $x_1, \ldots, x_{n+1}$, $n+1$ éléments d'ordre p choisis respectivement dans les centres des $n+1$

p-sous-groupes de Sylow de G. Alors il existe i et j $(i \neq j)$ tels que $[x_i,_t x_j] = 1$ pour un certain $t \in \mathbb{N}$, ce qui est contradictoire, d'après le Lemme 4.1, $\square$

Maintenant, nous pouvons montrer le Théorème 1.5. Si n et m sont deux entiers positifs et p un nombre premier, on note $\mathrm{PSL}(n, p^m)$ le groupe linéaire spécial projectif de degré n sur le corps fini d'ordre p^m.

Démonstration du Théorème 1.5. D'après le Théorème 1.2 de [1], A_5 satisfait la condition $\mathcal{E}(16)$. Supposons qu'il existe un groupe fini simple non abélien satisfaisant la condition $\mathcal{E}(16)$ non isomorphe à A_5. Soit G un tel groupe d'ordre minimal. Ainsi chaque section propre simple non abélienne de G est isomorphe à A_5. Par conséquent, d'après la Proposition 3 de [4], G est isomorphe à l'un des groupes suivants :

(1) $\mathrm{PSL}(2, 2^p)$, $p = 4$ ou premier ; $\mathrm{PSL}(2, 3^p)$, $\mathrm{PSL}(2, 5^p)$, p premier ; $\mathrm{PSL}(2, p)$ p premier $\geqslant 7$.
(2) $\mathrm{PSL}(3, 3)$, $\mathrm{PSL}(3, 5)$, $\mathrm{PSU}(3, 4)$ (le groupe unitaire spécial projectif de degré 3 sur le corps fini d'ordre 16).
(3) $\mathrm{Sz}(2^p)$, p premier impair.

(1) Supposons que G soit isomorphe à l'un des groupes dans la liste (1). Pour tout nombre premier p et pour tout entier $n > 0$, $\mathrm{PSL}(2, p^n)$ possède $p^n + 1$ p-sous-groupes de Sylow, dont l'intersection deux à deux est triviale (pour une description des sous-groupes de Sylow de $\mathrm{PSL}(2, p^n)$, on pourra par exemple consulter le Chapitre II de [9]). Le Corollaire 4.2 permet donc de se limiter aux groupes $\mathrm{PSL}(2, 8)$, $\mathrm{PSL}(2, 9)$ et $\mathrm{PSL}(2, p)$ $(p = 7, 13)$. Mais si un nombre premier impair r divise $p^n - 1$ (respectivement $p^n + 1$), les r-sous-groupes de Sylow de $\mathrm{PSL}(2, p^n)$ sont d'intersection deux à deux triviale et au nombre de $p^n(p^n + 1)/2$ (respectivement $p^n(p^n - 1)/2$) (voir les Théorèmes 8.4 et 8.5 dans le Chapitre II de [9]). En prenant $r = 7$ pour $\mathrm{PSL}(2, 8)$, $r = 5$ pour $\mathrm{PSL}(2, 9)$ et $r = 3$ pour $\mathrm{PSL}(2, p)$ $(p = 7, 13)$, le Corollaire 4.2 montre que ces quatre groupes ne satisfont pas la condition $\mathcal{E}(16)$.

(2) Supposons que G est isomorphe à l'un des groupes dans la liste (2). Si $G \cong \mathrm{PSL}(3, 3)$, alors G est d'ordre $2^4 \times 3^3 \times 13$. On a $\upsilon_{13}(G) = 1 + 13k$ $(k > 0)$ et $\upsilon_{13}(G)$ divise $2^4 \times 3^3$. Puisque 14 ne divise pas $|G|$, $k > 1$ et $\upsilon_{13}(G) > 26 > 16$.

Si $G \cong \mathrm{PSL}(3, 5)$, alors G est d'ordre $2^5 \times 3 \times 5^3 \times 31$. Nous avons $\upsilon_{31}(G) = 1 + 31k$ $(k > 0)$, donc $\upsilon_{31}(G) > 31 > 16$.

Soit G le groupe $\mathrm{PSU}(3, 4)$ d'ordre $2^6 \times 3 \times 5^2 \times 13$ (voir [9, Chapitre II, Théorème 10.12(d)] ; noter cependant que dans loc.cit., le groupe en question est désigné par $\mathrm{PSU}(3, 16)$). Le nombre $\upsilon_{13}(G) = 1 + 13k$ $(k > 0)$ divise $2^6 \times 3 \times 5^2$, donc $\upsilon_{13}(G) > 26 > 16$.

Le Corollaire 4.2 permet encore de conclure la liste (2).

(3) Supposons que l'on ait $G \cong \mathrm{Sz}(2^p)$, G est donc d'ordre $2^{2p}(2^p - 1)(2^{2p} + 1)$ (où p est un nombre premier impair). Les 2-sous-groupes de Sylow sont d'intersection deux à deux triviale et leur nombre égal à $2^{2p} + 1$ [10, Chapitre XI] donc ces groupes ne satisfont pas la condition $\mathcal{E}(16)$ d'après le Corollaire 4.2. $\square$

Remerciements

Je voudrais exprimer ma gratitude au rapporteur pour ses nombreux commentaires sur une première version de cet article.

Cette recherche a été aidée par une bourse (numéro 801031) de l'université d'Ispahan.

Références

[1] A. Abdollahi, Some Engel conditions on finite subsets of certain groups, Houston J. Math. 27 (3) (2001) 511–522.
[2] T.M. Apostol, Introduction to Analytic Number Theory, third printing, Undergrad. Texts Math., Springer-Verlag, New York, 1986.
[3] M. Aschbacher, R.M. Guralnick, Some applications of the first cohomology group, J. Algebra 90 (1984) 446–460.
[4] R.D. Blyth, D.J.S. Robinson, Insoluble groups with the rewriting property P_8, J. Pure Appl. Algebra 72 (1991) 251–263.
[5] G. Endimioni, Groupes finis satisfaisant la condition $(\mathcal{N}, n)$, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I 319 (1994) 1245–1247.
[6] D. Gorenstein, Finite Groups, Harper and Row, New York, 1968.
[7] S. Haber, A. Rosenfeld, Groups as unions of proper subgroups, Amer. Math. Monthly 66 (1959) 491–493.
[8] P. Hall, Finite-by-nilpotent groups, Proc. London. Math. Soc. 4 (1954) 419–436.
[9] B. Huppert, Endliche Gruppen I, Springer-Verlag, Berlin, 1967.
[10] B. Huppert, N. Blackburn, Finite Groups III, Springer-Verlag, Berlin, 1982.
[11] P. Longobardi, M. Maj, Finitely generated soluble groups with an Engel condition on infinite subsets, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova 89 (1993) 97–102.
[12] D.J.S. Robinson, A Course in the Theory of Groups, second ed., Springer-Verlag, Berlin, 1995.
[13] M.J. Tomkinson, Hypercentre-by-finite groups, Publ. Math. Debrecen 40 (1992) 313–321.